

بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

آزمون آزمایشی مرحله اول (ویژه دانش آموزان دوم و سوم دبیرستان)

۱ بهمن ماه ۱۳۸۶ (۲۰:۰۰ تا ۱۶:۰۰)

مدت آزمون: ۴ ساعت

تذکرات:

- ضمن آرزوی موفقیت برای شما داوطلب گرامی، خواهشمند است به موارد زیر دقیقاً توجه نمایید.
 - تعداد سوالات این مسابقه ۳۰ عدد و وقت رسمی آن ۴ ساعت می باشد.
 - سعی شده است مشابه سازی این آزمون با آزمون اصلی و درجه دشواری سوالات رعایت شود.
 - همانند آزمون اصلی استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر برای حل مساله ممنوع می باشد.
 - شرایط ثبت نام و ارسال پاسخ در وبلاگ کاملاً توضیح داده شده است.
 - پس از اتمام آزمون حداکثر ۱ ساعت برای ارسال پاسخ فرصت دارید. پاسخهایی که بعد از این زمان به دست ما برسد تصحیح نخواهد شد.
 - نتایج مسابقه پس از اتمام آزمون اعلام می گردد.
- امیدواریم در آزمون اصلی همچنان موفق باشید.

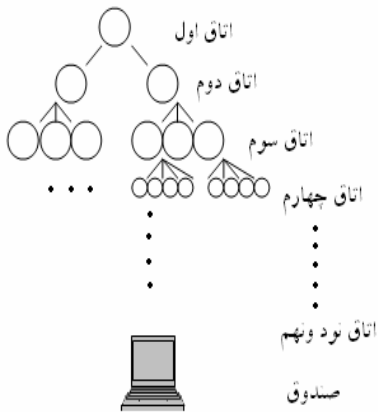
با تشکر مدیریت وب مینی المپیاد



۱) چند دسته اعداد اول (r, p, g) وجود دارد به قسمی که تمام اعداد زیر اول باشند؟

- الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) بی نهایت (ه) هیچکدام
- $Pg+r$, $pg+r^2$, $gr+p$, $gr+p^2$, $rp+g$, $rp+g^2$

۲) در بانک مملى شهر سیستم بانكى به شكل زیر است. در چهار اتاق اول دوربين مدار بسته كار گذاشته شده است ولی از اتاق پنجم به بعد بنا به مشكلاتى دوربين قرار ندارد. وقتى پول بسیار زیادى وارد بانک مى شود افرادى كه در چهار اتاق اول هستند جرأت كش رفتن پولها را نمى كنند!!! ولی افراد بعدى هر فرد به اندازه شما اتاقش از پولها كش مى رود. این روند ادامه دارد تا پول به صندوق برسد. باقیمانده مجموع پولهای هاپولى شده!! بر ۱۰۱ کدام است؟



(این بانک ۹۹ اتاق دارد)

- الف) ۱ (ب) ۹۹ (ج) ۸۹ (د) ۸۱ (ه) ۷۸

۳) مثلى كه بتوان آن را با تنها ۳ بلوك به شكل مثلث متساوى الاضلاع (به ضلع واحد Δ) پوشاند پوشش پذیر مى نامند. بزرگترین مثلث متساوى الاضلاع پوشش پذیر چه مساحتى دارد؟

- الف) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (ب) $\frac{9\sqrt{3}}{16}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\sqrt{3}$ (ه) $3\sqrt{3}$

۴) تعداد جایگشت های اعداد ۱ تا ۱۶ به طوری که به ازای هر عدد بین ۱ تا ۱۶ $a_i + a_{17-i}$ مقداری ثابت باشد؟

- الف) $\frac{16!}{8!}$ (ب) $8!$ (ج) $2^4 \times 8!$ (د) $2^8 \times 8!$ (ه) $2^{16} \times 8!$

۵) مایعی به حجم $3a + \sqrt{3}$ واحد مکعب را درون مخزنى مشورى شكل با قاعده شش ضلعى منتظم (به ضلع a) و ارتفاع h می ریزیم. سپس مخزن را به صورت افقى قرار می دهیم تا مایع در مخزن در ارتفاع h' قرار گیرد. hh' کدام است؟

- الف) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) ۳ (د) $3\sqrt{3}$ (ه) $\sqrt{3}$

۶) معادله $\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \right] = \sqrt{n}$ در اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

- الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۷) عددی طبیعی و فرد بزرگتر از ۵ می باشد. کوچکترین مقدار m را چنان بیابید که مطمئن باشیم در گرافی با n راس و m یال حتماً یک دور زوج وجود دارد.

- الف) $2n-1$ ب) $2n$ ج) $3n-1$ د) $3n$ ه) n^2-1

۸) دو پاره خط AB و $A'B'$ وجود دارند. مکان هندسی نقطه ای مانند C به طوری که محیطهای مثلثهای ABC و $A'B'C'$ با هم برابر و برابر عدد ثابتی مانند K شود کدام است؟

- الف) دو نقطه ب) یک پاره خط ج) دو پاره خط د) کمانی از دایره ه) هیچکدام

۹) چند زوج (a,b) وجود دارد که عدد $\overline{a0b} + \overline{b0a}$ دقیقاً ۶ مقسوم علیه داشته باشد؟ ($a, b \neq 0$)

- الف) ۱۱ ب) ۱۴ ج) ۱۶ د) ۱۸ ه) ۱۹

۱۰) در مثلث ABC نقطه M وسط BC است و نقطه D محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC است. اگر

$$MD = \frac{BC}{3}$$

طول مماس مشترک خارجی متناظر با آن است؟

- الف) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{3}{4}$ ه) $\frac{1}{8}$

۱۱) اگر x, y, z, k اعدادی نامنفی باشند و $x + y + z + k = 3$ ماکزیم $xy^2 + zx^2 + kz^2 + yk^2$ در کدام بازه

قرار دارد؟

- الف) $(0.1, 1.1)$ ب) $(1.1, 2.1)$ ج) $(2.1, 3.1)$ د) $(3.1, 4.1)$ ه) $(4.1, 5.1)$

$$\begin{cases} [a, b] = 1000 \\ [b, c] = 2000 \\ [c, a] = 2000 \end{cases}$$

۱۲) چند سه تایی مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که:

- الف) ۵۰ ب) ۵۵ ج) ۶۰ د) ۶۵ ه) ۷۰

۱۳) از مجموعه $\{100, \dots, 201, 202\}$ سه عدد را به گونه ای انتخاب کنید که تشکیل تصاعد ندهند. تعداد راههای انتخاب چقدر است؟

- الف) $3 \binom{100}{..2}$ ب) $\binom{100}{..3} - \binom{50}{.2}$ ج) $2 \binom{50}{.2} - \binom{100}{..3}$ د) $\binom{50}{.2}$ ه) $\binom{100}{..3} - \binom{100}{..2}$



۱۴) سه رادار مشابه در اختیار داریم که هر یک می توانند شعاع ۳ کیلومتری خود را پوشش دهند. با استفاده از این سه رادار حداکثر چه شعاعی را می توان به طور کامل پوشش داد؟

- الف) $\sqrt{3}$ ب) $2\sqrt{3}$ ج) $3\sqrt{3}$ د) 6 ه) 12

۱۵) به ازای هر زیر مجموعه از $\{1, 2, \dots, 100\}$ مجموع اعضای آن را روی تخته یادداشت می کنیم. کدام گزینه مجموع اعداد نوشته شده را نشان می دهد؟

- الف) $2^{100} \times 99 \times 100$ ب) $2^{99} \times 99 \times 100$ ج) $2^{99} \times 99 \times 50$ د) $2^{100} \times 99 \times 50$ ه) هیچکدام

۱۶) در یک بازی دو نفره n سنگ ریزه روی میز قرار دارد. (تعداد سنگ ریزه های دسته i ام a_i می باشد). در هر مرحله هر نفر باید هر دسته را به دو دسته ناتهی تقسیم کند. (اگر دسته ای یک عضوی باشد آن را کنار می گذاریم). بازنده کسی است که دیگر دسته ای برای تقسیم کردن در اختیار نداشته باشد به عبارتی همه دسته ها یک عضوی شده باشند و کنار رفته باشند. (دسته ها با علامت $(-)$ از هم جدا شده اند).

در چند مورد از موارد زیر نفر دوم می تواند برنده بازی باشد؟

- | |
|-----------------------------|
| 2 - 3 - 4 - 5 - 6 |
| 1 - 2 - 6 - ... - 120 - 720 |
| 1 - 3 - 7 - 15 - ... - 1023 |
| 10 - 20 - 30 - ... - 100 |
| 100 - 101 - 102 - ... - 127 |
| 1386-1387-...-2008 |

- الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) همه موارد

۱۷) معادله فوق در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

$$(2y + z)^2 + 8y + 4z = 1386x$$

- الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) بی شمار

۱۸) درون مخروط قائمی که به صورت سر و ته روی زمین قرار گرفته است تیله ای به شعاع واحد می اندازیم. اگر شعاع قاعده مخروط $5\sqrt{2}$ باشد ارتفاع مخروط چقدر باشد تا تیله در ۲ سانتی متری زمین متوقف شود؟ (فاصله مرکز تیله تا زمین ۳ سانتی متر شود)

- الف) ۲۰ ب) ۵ ج) ۱۰ د) $10\sqrt{2}$ ه) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

۱۹) بزرگترین مقدار n که بتوان $n!$ را به صورت حاصل ضرب $n-3$ عدد متوالی نوشت در کدام بازه قرار می گیرد؟

- الف) (15,20) ب) (20,25) ج) (25,30) د) (30,35) ه) (35,40)

۲۰) عدد چهار رقمی $m = \overline{abcd}$ را شاخ دار گوئیم اگر دارای شرط p باشد. می دانیم دقیقاً ۱۳۸۶ عدد شاخ دار وجود دارد. شرط p کدام می تواند باشد؟

الف) $|a-d| = 2$ و m بر ۱۰ بخش پذیر نباشد.

ب) $|a-d| = 2$ و m بر ۱۰ بخش پذیر نباشد و $\left\lfloor \frac{m}{10} \right\rfloor$ یا $\left\lfloor \frac{m}{100} \right\rfloor$ بر ۱۰ بخش پذیر نباشند.

ج) $|a-d| = 2$ و m بر ۱۰ بخش پذیر نباشد و $\left\lfloor \frac{m}{10} \right\rfloor$ و $\left\lfloor \frac{m}{100} \right\rfloor$ بر ۱۰ بخش پذیر نباشند.

د) $|a-d| = 3$ و m بر ۱۰ بخش پذیر نباشد و $\left\lfloor \frac{m}{10} \right\rfloor$ و $\left\lfloor \frac{m}{100} \right\rfloor$ بر ۱۰ بخش پذیر نباشند.

ه) هیچکدام

۲۱) یک مکعب مستطیل $۳۰ * ۴۰ * ۵۰$ داریم که از مکعب های $۱۰ * ۱۰ * ۱۰$ ساخته شده است. قطر داخلی این مکعب مستطیل از داخل چند مکعب عبور می کند؟

الف) ۸

ب) ۹

ج) ۱۰

د) ۱۱

ه) ۱۲

۲۲) در بازی دامبولر تعدادی گوی در ردیفهایی قرار گرفته اند به طوری که در ردیف i ام 10^{i-1} گوی وجود دارد. بازی به اینصورت است که نفر اول یک ردیف را انتخاب می کند و مجموع تعداد گوی های آن ردیف و ردیفهای قبل را در نظر می گیرند. اگر این تعداد مضرب ۱۳ بود برایش ۱ امتیاز ثبت می شود و سپس نوبت به نفر دوم می رسد. تنها محدودیتی که نفر دوم دارد این است که نمی تواند ردیفهایی به شکل ردیفهایی که نفر قبل انتخاب کرده را انتخاب کند (مثلاً: اگر نفر اول ردیفی به شکل $3k$ را انتخاب کند نفر دیگر حق انتخاب ردیفهایی به این شکل را نخواهد داشت ولی خود فرد می تواند ردیفهایی به آن شکل را انتخاب کند) شخصی برنده است که امتیاز بیشتری کسب کند (کسی حق برداشتن مهره ردیف اول را ندارد)

با شروع از چه ردیفهایی نفر دوم به هیچ وجه استراتژی برد نخواهد داشت؟

الف) $5k$ ب) $5k+1$ ج) $6k$ د) $6k-1$ ه) نفر دوم همواره استراتژی برد دارد.

۲۳) در سوال قبل در صورت داشتن ۱۳۸۶ ردیف اگر یک ریاضیدان بی اشتباه بازی را شروع کند حداکثر چند امتیاز می تواند کسب کند؟

الف) ۲۳۱

ب) ۲۴۳

ج) ۲۲۵

د) ۱۸۹

ه) ۲۷۳

۲۴) حلقه زیر را انجام داده ایم.

برای i از ۱ تا n و برای j از ۱ تا i و برای k از ۱ تا j چاپ کن ☺
اگر در انتها ۸۴ تا ☺ چاپ شده باشد n چه عددی می باشد؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰

۲۵) چند عدد دورقمی به صورت \overline{ab} وجود دارد به طوری که عدد \overline{aabb} مربع کامل شود؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۵

۲۶) برای n جسم فضایی با حجمهای v_1, v_2, \dots, v_n عمل δ اینگونه تعریف می شود:

$$\delta(n) = \sum_{i=1}^n k_i v_i \quad k_i \in \mathbb{Z}$$

دو جسم به حجمهای ۱۳۸۶ و ۲۰۰۸ در اختیار داریم. با استفاده مکرر از عمل δ کدام گزینه صحیح است؟

الف) همه فضاهای گویا (\mathbb{Q}^3) را می توان تشکیل داد.

ب) تنها همه فضاهای صحیح (\mathbb{Z}^3) را می توان تشکیل داد.

ج) تنها نصف فضاهای صحیح (\mathbb{Z}^3) را می توان تشکیل داد.

د) تنها $\frac{1}{3}$ فضاهای صحیح (\mathbb{Z}^3) را می توان تشکیل داد.

ه) کمتر از $\frac{1}{3}$ فضاهای صحیح (\mathbb{Z}^3) را می توان تشکیل داد.

۲۷) مجموع ارقام عدد 99^{99} را A و مجموع ارقام A را B می نامیم. مجموع ارقام B کدام است؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۲ ه) ۱۸

۲۸) ۱۳۸۶ گوی در یک ظرف قرار دارد و روی آنها اعداد حقیقی را نوشته ایم. اگر هر یک از گوی ها را برداریم بقیه را می

توان به دو دسته با مجموعهای مساوی افراز کرد. کدام گزاره در مورد آنها درست می باشد؟ (گوی a_i گوی i ام است.)

الف) $\sum_{i=1}^{1386} (-1)^i (a_i)^2 = a_j \quad 1 \leq j \leq 1386$ ب) $\sum_{i < j} a_i a_j = \frac{1386!}{2!}$

ج) $\sum_{i=1}^{1386} (-1)^{i+1} a_i = -1$ د) $\sum_{i=1}^{1386} a_i^i = 1^{1386} + 2^{1385} + \dots + 1386^1$

ه) $\sum_{i=1}^{1386} a_i + a_j = 1385 \times 1386$

